Tutorial: Caminho de Menor Soma

Arthur Andrade D'Olival

1 Solução do Problema

O problema consiste em encontrar o **menor custo** necessário para percorrer uma grade (*matriz*) de inteiros positivos. A grade possui n linhas e m colunas, e cada célula contém um número positivo que representa o custo de passar por ela.

O objetivo é sair da célula **superior esquerda** da grade e chegar à célula **inferior direita**, movendo-se apenas para a **direita** ou para **baixo**. A soma dos valores das células visitadas deve ser a menor possível.

Este problema pode ser resolvido de forma eficiente utilizando **programação dinâmica**.

1.1 Definição do Subproblema

Seja uma matriz de custos C de tamanho $n \times m$. Definimos:

$$dp[i][j] = \text{o menor custo para chegar à célula } (i,j) \text{ a partir de } (0,0).$$

Ou seja, $dp[i][j]$ representa o custo mínimo para alcançar exatamente a posição (i,j).

1.2 Função de Transição

Como só é possível mover-se para a **direita** ou para **baixo**, a célula (i,j) só pode ser alcançada a partir de:

- $(i-1,j)$: movimento vindo de **cima**;
- $(i,j-1)$: movimento vindo da **esquerda**.

Assim, o custo mínimo para chegar a (i,j) é dado por:

$$dp[i][j] = C[i][j] + \min(dp[i-1][j],\ dp[i][j-1]).$$

1.3 Casos Base

- Primeira célula:
$$dp[0][0] = C[0][0]$$
- Primeira linha (somente movimentos para a direita):
$$dp[0][j] = dp[0][j-1] + C[0][j]$$
- Primeira coluna (somente movimentos para baixo):
$$dp[i][0] = dp[i-1][0] + C[i][0]$$

1.4 Construção da Tabela

Após inicializar os casos base, preenchermos o restante da matriz dp utilizando:

$$dp[i][j] = C[i][j] + \min(dp[i-1][j],\ dp[i][j-1]).$$

Ao término do processo, o valor da última posição:

$$dp[n-1][m-1]$$

representa o **menor custo possível** para ir da célula inicial até a célula final.