

Tutorial: Pique Pega

Arthur Andrade D'Oliveira

O problema pode ser modelado como um jogo de perseguição em um grafo acíclico conectado, uma árvore. A vitória do Delegado é garantida de forma determinística se, e somente se, pelo menos uma das três propriedades estruturais abaixo for satisfeita. Caso contrário, a topologia da árvore garante ao Noivo uma estratégia de evasão infinita.

- Captura no Primeiro Turno:** Se a distância no grafo entre os vértices iniciais for $dist(a, b) \leq d_a$, o Delegado alcança o Noivo imediatamente na sua primeira jogada. Essa distância pode ser calculada em $O(N)$ executando uma Busca em Largura (BFS) ou Busca em Profundidade (DFS) a partir do vértice a .
- Cobertura do Diâmetro da Árvore:** O Delegado vence se o diâmetro da árvore, o caminho mais longo entre quaisquer dois vértices, for $D \leq 2 \cdot d_a$.
 - **Prova:** Em uma árvore de diâmetro D , o raio a partir de seu centro absoluto é $\lceil D/2 \rceil$. Se $D \leq 2 \cdot d_a$, o Delegado pode simplesmente mover-se em direção ao vértice central da árvore. A partir desse centro, a distância máxima para qualquer outro vértice do grafo será $\leq d_a$. Assim, o Delegado passa a cobrir todos os vértices possíveis em um único turno, não deixando zonas seguras para o Noivo.
 - **Cálculo:** O diâmetro pode ser encontrado linearmente em $O(N)$ usando duas execuções de BFS ou DFS: a primeira partindo de um nó arbitrário para encontrar o nó u mais distante, e a segunda partindo de u para encontrar o nó v mais distante. A distância $dist(u, v)$ será o diâmetro D .
- Dominância de Raio de Ação:** O Delegado vence se a sua capacidade de movimento anular o potencial de salto do Noivo, o que ocorre estritamente quando $2 \cdot d_a \geq d_b$.
 - **Prova:** Para que o Noivo consiga escapar de um cerco ao ser encurralado em uma extremidade da árvore, ele precisaria ser capaz de "pular por cima" da zona de controle do Delegado sem aterrissar dentro dela. Como o Delegado controla um raio de d_a ao seu redor, o diâmetro da sua zona de ameaça é $2 \cdot d_a$. Para cruzar essa zona com segurança e ainda ganhar distância, o Noivo precisaria de um salto estritamente maior que a zona de perigo, ou seja, $d_b > 2 \cdot d_a$. Se essa condição de salto falha, o Delegado pode gradualmente empurrar o Noivo para uma folha da árvore e capturá-lo, reduzindo a distância entre eles a cada turno.

Se nenhuma dessas três condições for satisfeita ($dist(a, b) > d_a$, $D > 2 \cdot d_a$ e $d_b > 2 \cdot d_a$), o Noivo sempre terá espaço topológico para manter uma distância de segurança superior a d_a após o seu turno, configurando um jogo infinito. A complexidade de tempo total para verificar todas as condições e decidir o vencedor é $O(N)$.